Aufgabentyp: Integralrechnung (Volumen von Rotationskörpern);
Volumen von Rotationskörpern (Integralrechnung);
Rotationskörper (Volumen mittels Integral)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 8$ mit $D_f = \mathbb{R}_0^+$.

a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f!

b) Die Fläche, die von G_f, der Geraden $x = 2$ und der x- und y- Achse eingeschlossen wird, rotiert um die y- Achse.
Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Rotationskörpers!

ABACUS ist markenrechtlich geschützt. Nachahmung und Nachdruck verboten.
© by ABACUS GmbH Bundesgeschäftsstelle: Schöngeisinger Str. 6, 82256 Fürstenfeldbruck. www.abacus-nachhilfe.de

Lösung

a) **Ges:** Skizze

Lös: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 8$

G_f ist ein nach unten geöffneter Parabelast mit Scheitel (0 | 8)

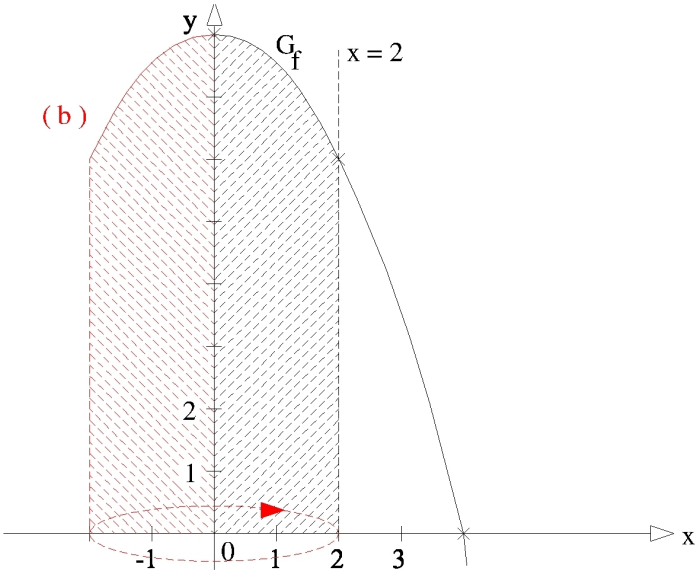
NST: $f(x) = 0$

$-\frac{1}{2}x^2 + 8 = 0 \qquad | - 8 \quad | : (-\frac{1}{2})$

$x^2 = 16$

$x_1 = \underset{(-)}{+} 4$

SKIZZE:



b) **Geg:** Fläche, die von G_f, der Geraden x = 2 und der x- und y- Achse eingeschlossen wird, rotiert um die y- Achse

Ges: V

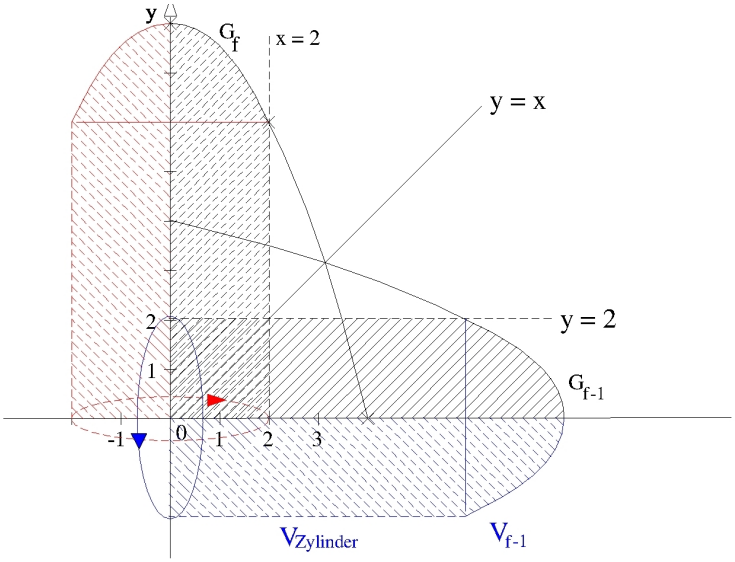
Lös: s. Skizze zu **a)**

Wenn die Rotationsachse die y- Achse ist, lässt man die Umkehrfunktion f^{-1} um die x- Achse rotieren und erhält damit die gleiche Fläche.

Das Volumen ergibt sich nun dadurch, dass man das Volumen des Zylinders, der durch das rotierende Rechteck mit Länge f (2) und Breite 4 entsteht, zu dem Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation von f^{-1} im Bereich [f(2); 8] entsteht, addiert:

ABACUS ist markenrechtlich geschützt. Nachahmung und Nachdruck verboten.
© by ABACUS GmbH Bundesgeschäftsstelle: Schöngeisinger Str. 6, 82256 Fürstenfeldbruck. www.abacus-nachhilfe.de

Lösung



$V = V_{Zylinder} + V_{f-1}$

$$V_{f^{-1}} = \pi \int_{y_1}^{y_2} \left[f^{-1}(x) \right]^2 dx$$

f^{-1} existiert, da f in $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton fallend ist.

$y = -\frac{1}{2} x^2 + 8 \qquad D_f = \mathbb{R}_0^+, \quad W_f = [-\infty; 8]$

x und y vertauschen und die Gleichung nach y auflösen:

$$x = -\tfrac{1}{2} y^2 + 8 \qquad | -8 \; | \cdot (-2)$$
$$\Rightarrow (x - 8) \cdot (-2) = y^2$$
$$\Rightarrow -2x + 16 = y^2 \qquad | \sqrt{\ldots}$$
$$\Rightarrow y = \underset{(-)}{+} \sqrt{-2x + 16} \qquad [y \geq 0]$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{-2x + 16} \qquad D_{f^{-1}} = [-\infty; 8], \qquad W_{f^{-1}} = \mathbb{R}_0^+$$

$y_1 = f(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 8 = 6$
$y_2 = 8$

$$\Rightarrow V_{f^{-1}} = \pi \int_6^8 \left[\sqrt{-2x + 16} \right]^2 dx$$
$$= \pi \int_6^8 (-2x + 16)\, dx$$
$$= \pi \left[-x^2 + 16x \right]_6^8$$
$$= \pi \left[-8^2 + 16 \cdot 8 - (-6^2 + 16 \cdot 6) \right]$$
$$= \pi \left[64 - 60 \right]$$
$$= 4\pi$$

ABACUS ist markenrechtlich geschützt. Nachahmung und Nachdruck verboten.
© by ABACUS GmbH Bundesgeschäftsstelle: Schöngeisinger Str. 6, 82256 Fürstenfeldbruck. www.abacus-nachhilfe.de

Lösung

$$V_{Zylinder} = r^2 \cdot \pi \cdot h = 2^2 \cdot \pi \cdot 6 = 24\ \pi$$

$$\Rightarrow V = V_{Zylinder} + V_{f-1}$$

$$= 24\ \pi + 4\ \pi = 28\ \pi\ \text{VE}$$

ABACUS ist markenrechtlich geschützt. Nachahmung und Nachdruck verboten.
© by ABACUS GmbH Bundesgeschäftsstelle: Schöngeisinger Str. 6, 82256 Fürstenfeldbruck. www.abacus-nachhilfe.de